R008-01 **会場: B 会場（4F 会議室 3）** **時間: 10 月 24 日 13:45-14:00**

四元数によるジャイロカイネティクス

中村 匡 [1]
[1] 福井県大

Quaternion Expression of Gyrokinetics

Tadas Nakamura[1]
[1] FPU

https://www.fpu.ac.jp/faculty_members/tadas.html

It is known J.C. Maxwell used Hamilton’s quaternions to express Maxwell equations in his masterpiece "Treatise on Electricity and Magnetism." The theory of vector analysis, which is familiar to us in modern physics, is developed a little after that by W. Gibbs and O. Heaviside. At the end of the 19th century and the beginning of the 20th century, there arises a heated controversy on this topic. Which is the better description of electromagnetism: the Gibbs/Heaviside’s vector analysis or quaternions?

It turned out more and more physicists prefer the vector analysis and few people pay attention to quaternions in the latter half of the 20th century. However, quaternions resurrect in the 21th century in connection with computer graphics; the quaternion is found to be suitable to calculate 3 dimensional rotations in games or movies. Now more and more computer engineers learn the theory of quaternion for this purpose.

This fact suggests quaternions are suitable to express something related rotations, whereas vectors are good for parallel transition. In the controversy of quaternion vs vector analysis, it is regarded as a disadvantage of quaternions that square of its vector component becomes negative. However, this is reasonable when we consider a quaternion represents rotation. When we express 2 dimensional rotation by an ordinary complex number, the fact that the square of its imaginary part becomes negative corresponds to 180 degree rotation. A similar interpretation is possible for quaternions and negative square of the vector component (imaginary component) is understandable in the same way.

Provided that quaternions are suitable for rotations, it is expected they are useful to express particle gyration in magnetized plasmas. The gyration in a 2 dimensional plane is often expressed by a complex exponential function in plasma physics. It can be extended to 3 dimensional case when we introduce quaternions to express rotations. The exponential function of quaternions becomes considerably complicated due to the their anti-commutable nature and we need to use Baker–Campbell–Hau formula for multiplications. This complication is essential to express the complicated nature of 3 dimensional rotations. Applications to numerical calculations and drift approximations will be discussed in the talk.

マックスウェルが著書「Treatise on Electricity and Magnetism」で書いたマックスウェル方程式は，ベクトル解析ではなくハミルトンの四元数を使っていたことはよく知られている（初出の論文では四元数ではなく，成分ごとの表記になっている）。その後，ギブスとヘビサイドによって，ベクトル解析が案出され，19 世紀のおわりから 20 世紀のはじめにかけて，四元数とベクトル解析のどちらが物理の表記として適しているかが論争になった。

結局，ベクトル解析が一般にひろまって，20 世紀の後半は四元数は数学家が群論などとのかかわりで研究する対象になり，物理学の分野ではあまり知られることはなかった。ところが，21 世紀にはいってゲームなどのコンピューターグラフィックスの分野で，3 次元回転への応用の利便性によって，ふたたび四元数が注目されるようになり，現在では書店のコンピューターサイエンスのコーナーに四元数の教科書がならんでいるのが見られる。

四元数は複素数の拡張であり，虚数部分が i ひとつではなく，i, j, k の三成分ある数学構造である。ハミルトンはこの虚数部の間に $ij = -ji$ のような非可換性を導入することにより，整合性のある四元数の体系をつくった。3 次元回転は非可換（回転の順序によって結果が違う）なので，この四元数の非可換性と相性がいい。前述の四元数かベクトル解析か，という論争がでは，四元数の利点として回転のとりあつかいやすさがあげられた反面，欠点としてベクトル部分の自乗が負の数になるという指摘があった。しかし，ベクトル解析流のベクトルを平行移動，四元数を回転移動に対応する数学的構造だとすると，自乗が負になるのは，むしろ納得ができる。たとえば，2 次元ベクトルを普通の複素数であらわすと，その虚数部の自乗が負になるのは 180 度の回転に対応して自然である。

四元数が回転をあらわすとすれば，磁化プラズマにおいて重要なジャイロ運動をあらわすのに適しているのでは，と考えるのは自然なことであろう。2 次元運動の場合はジャイロ運動を複素数であらわすのは一般によくやられることである。本研究ではそれを四元数を使って 3 次元に拡張するとどうなるかを考える。この場合，有限角の回転は 2 次元と同様に指数関数であらわされるが，四元数の非可換性により，指数関数のあつかいが複雑になる。この複雑さこそ，3 次元空間でのジャイロ運動の複雑さである。講演では数値計算やドリフト近似への応用なども考える。