

ランダウ積分路を使わないランダウ減衰の導出

中村 匡 [1]
[1] 福井県大

Derivation of Landau damping without Landau contours

Tadas Nakamura[1]
[1] FPU

<http://mira.bio.fpu.ac.jp/tadas>

Landau damping is one of the most important ingredients in plasma physics, and it is usually derived by deforming the integration contour in v (= velocity) complex plane to avoid poles of wave dispersion. This procedure is purely mathematical one coming from inverse Laplace transform, and the deformation of the contour has no

physical meaning. However, confusion is often found even in textbooks and some physical meaning is provided for the contour deformation. Interestingly the volume of "Physical Kinetics" in the Landau textbook series, which was written after the Landau's death, has fallen into this pitfall.

To clarify this point, a derivation of Landau damping without Landau contours has been developed here. The knowledge of analytical continuation or integration contour deformation, which may be hard to understand for who are not familiar to the theory of complex analysis, is not required. Though one need to know complex numbers enough to understand Laplace transform, an simple elementary integration formula can perform velocity integration to obtain Landau damping.

ランダウ減衰は、どのプラズマ物理の教科書にも載っている重要な無衝突プラズマの基本過程である。ランダウによるオリジナルの導出では、速度を複素数に解析接続し、その複素平面上で積分路を変形する、いわゆる「ランダウ積分路」を使うことによって実軸上の極をさけるという手法をもちいている。これはラプラス逆変換が ω 平面（周波数平面）上の $\text{Im}(\omega)$ が十分大きい積分路にそってなされることに対応しており、必要な積分を評価する上での純粋な数学的操作である。したがって積分路の変形自体に物理的意味はない。しかし、この事情はあまりよく理解されてはおらず、ランダウ積分路に物理的な意味をもたせようとする解説が教科書などにも散見される。たとえば本家のランダウ物理学教程の「物理的運動学」（ランダウの死後に書かれた）の中には「時間 $t = -\infty$ から無限にゆっくりと加わる電場を考察しよう」などとあきらかに矛盾する記述が見つかる。ここでの計算であつかうのは閉じた系の時間発展であり、外から電場が印加されているわけではないからである。

本研究では教育的な目的で、このような混乱を明らかにするために、ランダウ積分路をつかわずに、初等的な積分公式 $\int 1/x dx = \log x$ を使ってランダウ減衰を導出する。この計算には、ラプラス変換の知識は必要であるが、解析接続や積分路の変更などの難解な複素解析の知識は必要ない。また、この計算法は、分布関数を有理関数で近似するという手法を用いているが、それにより、マックスウェル分布以外の任意の分布でも分散関係を計算できるという利点もある。